

ЛЕКЦИЯ-13

7. ИНТЕГРАЛДЫҚ ТҮРЛЕНДІРУЛЕР МЕН ТЕНДЕУЛЕР

Математикалық физиканың көптеген есептерін шешу мәселесі арнайы ядролы интегралдық теңдеулерді шешуге алып келеді. Бұндай теңдеулерді интегралдық түрлендірулер әдістерімен шешу ыңғайлы. $f(x)$ функциясы шектелген немесе шектелмеген (a,b) облысында анықталған болсын. $f(x)$ функциясын интегралдық түрлендіру деп

$$\tilde{f}(t) = \int_a^b K(x,t) f(x) dx$$

өрнегін айтамыз, мұнда белгілі $K(x,t)$ функциясы түрлендірудің ядросы делінеді, ол әрбір түрлендіру үшін әртүрлі болады.

Практикалық есептерде Фурье, Лаплас, Меллин, Бессель түрлендірулері қолданылады. Бұл түрлендірулерге арналған толып жатқан ғылыми мақалалар және оқулық әдебиеттер бар. Біз бұл тарауда ол түрлендірулердің тек интегралдық теңдеулерді шешу үшін қажеттілерін ғана келтіреміз.

§7.1. Фурье түрлендіруі және оның интегралдық теңдеулерге қолдану

1. Фурьенің интегралдық түрлендіруі түсінігі. Белгілі функция $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ және кез келген шенелген кесіндіде Дирихле шартын қанағаттандырса, онда математикалық анализ курсінде

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos t(x-\xi) d\xi \quad (109)$$

формуласының орынды екенін дәлелдейді. Егер $f(x)$ үзіліссіз функция болса, онда $f(x+0) + f(x-0) = 2f(x)$. (109) теңдігін Фурьенің интегралдық формуласы, ал оның оң жағын Фурье интегралы деп айтады.

(109) формуласын комплекс айнымалы үшін

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dt \int_{-\infty}^\infty f(\xi) e^{i(x-\xi)t} d\xi \quad (110)$$

түрінде жазуға болады. (110) теңдігін мына екі өрнек

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-it\xi} d\xi, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{itx} dt$$

түрінде жазуға болады, бұл өрнектерді Фурьенің интегралдық түрлендірулері деп айтады. Мұндағы соңғы интегралды Коши бойынша интегралдың бас мәні мағынасында қабылдаймыз. Бірінші теңдікті функцияны тура түрлендіру, ал екінші теңдікті кері түрлендіру деп айтады.

(109) интегралдық формуласынан Фурьенің синус және косинус түрлендірулерін алуға болады:

а) Егер $(-\infty, +\infty)$ аралығында $f(x)$ тақ функция болса, онда тақ функциядан $(-\infty, +\infty)$ аралығы бойынша алынған интегралдың нөлге айналатынын ескерсек,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) [\cos xt \cos t\xi + \sin tx \sin t\xi] d\xi = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} f(\xi) \sin tx \sin t\xi d\xi. \end{aligned}$$

Бұдан

$$\tilde{f}_s(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin t\xi d\xi$$

деп белгілеп,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{f}_s(t) \sin tx dt$$

өрнегін шығарамыз. Бұл формулаларды сәйкес түрде Фурьенің тура және кері синус түрлендірулері деп атайды;

б) Егер $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ аралығында жұп болса, жоғарыдағыдай жолмен

$$\tilde{f}_c(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \xi d\xi$$

деп белгілеп,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{f}_c(t) \cos tx dt$$

түріндегі Фурьенің косинус түрлендіруін аламыз.

2. Фурье түрлендіруінің кейбір қасиеттері. Ыңғайлы болуы үшін Фурьенің $f(x)$ функциясын тура түрлендіруді $F[f]$, ал кері түрлендіруді $F^{-1}[f]$ символдармен белгілейік.

1) Егер $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ болса, онда

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f \quad (111)$$

(111) формуласы (110) теңдігінің басқаша жазылған түрі.

2) L_1 жиында F және F^{-1} түрлендірулері өзара бірмәнді түрлендірулер, яғни $f_1 = f_2 \Leftrightarrow F[f_1] = F[f_2] \quad (F^{-1}[f_1] = F^{-1}[f_2])$.

Дәлелдеуі. Егер $f_1 = f_2$ болса, онда $f_1 - f_2 = 0$. Бұдан $F[f_1 - f_2] = 0$ F түрлендіруінің сызықты болуына байланысты $F[f_1 - f_2] = F[f_1] - F[f_2]$ немесе $F[f_1] = F[f_2]$. Керісінше, егер $F[f_1] = F[f_2]$ болса, онда F^{-1} түрлендіруді қолданып, $F^{-1}[F[f_1] - F[f_2]] = 0$ немесе $F^{-1}[F[f_1]] = F^{-1}[F[f_2]]$ өрнегін аламыз. Одан кейін бұл соңғы теңдікке (111) формуласын пайдалансақ, $f_1 = f_2$ екені шығады.

3) Егер $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ болса, онда $F[f]$ функциясы барлық сандық осьте шектелген және бірқалыпты үзіліссіз. Бұл тұжырымның дұрыстығы

$$|F[f]| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-it\xi} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi$$

теңсіздігінен көрінеді.

Мына төмендегі қасиет интегралдық тендеулерді шешуде көп қолданылады.

4) $f_1(x)$ және $f_2(x)$ функциялары $(-\infty, +\infty)$ аралығында шектелген, үзіліссіз және абсолютті интегралданатын болсын. Сонда

$$F(f_1 * f_2) = \sqrt{2\pi} F[f_1] F[f_2], \quad (112)$$

мұнда

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi; \quad (113)$$

Оны $f_1(x)$ пен $f_2(x)$ функциялардың ұйысуы деп атайды. Ұйысу операциясы үшін төмендегі қасиеттердің орынды екенін оңай көруге болады.

а) Егер $f_1(x)$ пен $f_2(x)$ функциялары $(-\infty, +\infty)$ аралығында шектелген, үзіліссіз және абсолютті интегралданатын болса, онда $f_1 * f_2$ сол аралықта шектелген, үзіліссіз және абсолютті интегралданатын болады.

ә) Функциялардың ұйысу операциясы коммутативті және ассоциативті.

а) қасиеті бойынша $f_1 * f_2$ өрнегін Фурье түрлендіруін қолдануға болады:

$$\begin{aligned} F[f_1 * f_2] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi \right\} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x - \xi) e^{-i\lambda x} dx \right\} d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-i\lambda t} dt \right\} e^{-i\lambda \xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-i\lambda t} dt, \\ &\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi = \sqrt{2\pi} F[f_1] F[f_2]. \end{aligned}$$

5) $f(x), f'(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ болсын, оның үстіне $|x| \rightarrow \infty$ жағдайында $f(x), f'(x) \rightarrow 0$ және $g(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ делік. Сонда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) \tilde{g}(t) dt \quad (114)$$

теңдігі орынды. Бұл өрнекті Парсевальдің күрделі теңдігі деп атайды.

Дәлелдеуі. Берілген шарттан $f(x)$ үшін $\tilde{f}(t)$ анықталады және $|\tilde{f}| \leq C(1 + |t|)^{-2}$ теңсіздігі шығады.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{itx} dt$$

өрнегінің екі жағын $g(x)$ функциясына көбейтіп, одан кейін x бойынша $-\infty$ - тен $+\infty$ ке дейін интегралдап,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{\tilde{f}(t)e^{ixt}\}g(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ixt}dx \right\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)\tilde{g}(t)dt\end{aligned}$$

екенін, яғни (114) формуласының дұрыстығын дәлелдейміз. (114) теңдігінде $f(x) = g(x)$ деп ұйғарып,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^2(t)dt \Rightarrow \|f\|_{L_2} = \|\tilde{f}\|_{L_2}$$

тепе-теңдіктерін аламыз.

3. Фурьенің интегралдық теңдеуі. Фурьенің өзара көс түрлендіруінің әрбірін сол интеграл ішіндегі функцияның теңдеуі, яғни екіншісін оның шешімі ретінде қарауға болады. Бұл жағдайда жоғарыда талқылаған Фредгольм теоремалары дұрыс болмауы мүмкін. Мысалы Фурьенің косинус түрлендіруін қарастырайық:

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos x\xi d\xi, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_1(\xi) \cos x\xi d\xi.$$

Бұл өрнектерді бір-біріне қоссақ,

$$f_1(x) + f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [f(\xi)] + f_1(\xi) \cos x\xi d\xi$$

теңдігі шығады. Бұдан жоғарғы айтылған шарттарды қанағаттандыратын $f(x)$ функциясын қалай алсақ та $\varphi(x) = f(x) + f_1(x)$ функциясы

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \cos x\xi d\xi \quad (115)$$

интегралдық теңдеуінің $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ меншікті санына сәйкес меншікті функциясы болады. Мәселен, $f(x)$ функциясын $f(x) = e^{-\alpha x}$ ($\alpha > 0$) деп алсақ,

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha \xi} \cos \xi x d\xi = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}.$$

Демек, $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ меншікті санына (115) интегралдық теңдеуінің

$$e^{-\alpha x} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}$$

түріндегі $\alpha > 0$ параметрлеріне байланысты ақырсыз көп шешімдер жиыны сәйкес келетіні шығады, яғни параметр $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ рангілі ақырлы сан емес.

1-мысал. Жұқа иілгіш пластинканың тербелуі туралы есептің шешімі

$$f(x) = \frac{1}{2bx} \int_0^\infty t \sin \frac{t^2}{4bx} \varphi(t) dt$$

интегралдық теңдеуге келеді, мұнда $\varphi(x)$ -белгісіз функция, ал $f(x)$ -белгілі функция. Бұл Фредгольмнің 1-текті интегралдық теңдеуі. Бұнда $t^2 = \tau$, $x = \frac{1}{4bv}$ деп айнымалыларды ауыстырсак, теңдеу

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{v} f\left(\frac{1}{bv}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi(\sqrt{\tau}) \sin v\tau d\tau$$

түріне келеді. Оған кері синус түрлендірудің формуласын қолданып,

$$\varphi(\sqrt{\tau}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{v} f\left(\frac{1}{4bv}\right) \sin v\tau d\tau$$

өрнегін аламыз. Енді бұдан бұрынғы айнымалыларға көшсек,

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{x} \sin \frac{t^2}{4bx} f(x) dx$$

жоғарыдағы теңдеудің шешімін анықтаймыз.

4. Ядро аргументтерінің айырымына байланысты Фредгольмнің интегралдық теңдеуі. Мынадай

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x-s) \varphi(s) ds + f(x) \quad (116)$$

ядро аргументтерінің айырымына байланысты интегралдық теңдеуді қарастырайық. $K(x, s), f(x), \varphi(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ болсын. Қарастырып отырған (116) теңдеуінің екі жағына да жоғарыдағы (113) формуласы бойынша Фурье түрлендіруін қолдансақ, $\tilde{\varphi}(t) = \lambda \sqrt{2\pi} \tilde{K}(t) \tilde{\varphi}(t) = \tilde{f}(t)$, бұдан

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{\tilde{f}(t)}{1 - \lambda \sqrt{2\pi} \tilde{K}(t)}$$

өрнегін аламыз. Егер $1 - \lambda \sqrt{2\pi} \tilde{K}(t) \neq 0$ болса, онда (116) теңдеуінің шешімін

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) e^{ixt}}{1 - \lambda \sqrt{2\pi} \tilde{K}(t)} dt \quad (117)$$

түрінде анықтаймыз. Егер $1 - \lambda \sqrt{2\pi} \tilde{K}(t) = 0$ болса, онда (116) теңдеуінің жалпы жағдайда абсолютті интегралданатын шешімі жоқ болады.

Енді (117) өрнегінен

$$\varphi(x) = -f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\tilde{f}(t)}{1 - \lambda \sqrt{2\pi} \tilde{K}(t)} - \tilde{f}(t) \right] e^{ixt} dt = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(t) \tilde{K}(t)}{1 - \lambda \sqrt{2\pi} \tilde{K}(t)} e^{ixt} dt \quad (118)$$

теңдігі шығады.

$$\frac{\tilde{K}(t)}{1 - \lambda \sqrt{2\pi} \tilde{K}(t)}$$

функциясын Фурьенің кері түрлендіруі $R(x, \lambda)$ болсын. Сонда (118) өрнегінің оң жағы

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi} \tilde{f}(t) \cdot \frac{\tilde{K}(t)}{1 - \lambda \sqrt{2\pi} \tilde{K}(t)} e^{ixt} dt$$

$f(x)$ пен $R(x, \lambda)$ функцияларының үйірткісі. Сондықтан (118) өрнегін

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} R(x-s, \lambda) f(s) ds \quad (119)$$

түрінде, яғни (116) теңдеуінің шешімі ретінде жазуға болады.

2-мысал. $\varphi(x) = f(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-s|} \varphi(s) ds$ теңдеуді шешу керек.

$\tilde{f}(t)$ мен $\tilde{\varphi}(t)$ функциялары сәйкес түрде $f(x)$ пен $\varphi(x)$ функцияларының Фурье түрлендірулері болсын. $K(x) = e^{-|x|}$ деп белгілеп,

$$\tilde{K}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{x(1-it)} dx + \int_0^{\infty} e^{-x(1+it)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-it} + \frac{1}{1+it} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

екенін анықтаймыз. Бұл өрнектің екі жағына Фурье түрлендіруін қолдансақ,

$$\tilde{\varphi}(t) = \tilde{f}(t) + \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{1+t^2} \tilde{\varphi}(t),$$

ал бұдан

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{1+t^2}{1-2\lambda+t^2} \tilde{f}(t).$$

Демек,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+t^2}{1-2\lambda+t^2} \tilde{f}(t) e^{ixt} dt,$$

мұндағы,

$$\frac{1-2\lambda+t^2}{1+t^2} = 1 - \lambda \sqrt{2\pi} \tilde{K}(t) = 1 - 2 \frac{\lambda}{1+t^2}.$$

$\lambda < \frac{1}{2}$ болған жағдайда $1 - \lambda \sqrt{2\pi} \tilde{K}(t) \neq 0, \forall t \in (-\infty, +\infty)$.

Жоғарыдағы өрнекті

$$\tilde{\varphi}(t) - \tilde{f}(t) = \frac{2\lambda}{1-2\lambda+t^2} \tilde{f}(t)$$

түрінде жазып, оның үстіне $\lambda < \frac{1}{2}$, болса,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{1-2\lambda+t^2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{1-2\lambda}} e^{-|x|\sqrt{1-2\lambda}}$$

екенін еске алып, одан кейін үйірткі операциясын пайдалансақ, берілген теңдеудің шешімін

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{-|x-t|\sqrt{1-2\lambda}}}{\sqrt{1-2t}} dt$$

түрінде анықтаймыз.

Енді жоғарыдағы (117) және (119) формулалары орынды болуы үшін функцияға қандай қажетті шарттар қою керек екенін көрсететін төмендегі тұжырымды дәлелдеусіз қабылдайық.

1 теорема. $f(x) \in L_2(-\infty, \infty), K(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ және $1 - \lambda \sqrt{2\pi} \tilde{K}(t) \neq 0 \quad \forall t$ үшін шарттары орынды болсын. Сонда (117) формуласымен анықталған $\varphi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ және (116) теңдеуінің жалғыз ғана шешімі бар болады. Бірақ $L_2(-\infty, \infty)$ кеңістігінде жатпайтын басқа шешімдері бар болуы мүмкін. Егер (116) теңдеуінің екі шешімі бар болса, олардың айырымы

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x-s) \varphi(s) ds$$

біртекті теңдеуін қанағаттандырады. Бұл теңдеудің шешімін $\varphi(x) = e^{\alpha x}$ түрінде іздейік. Ол кезде теңдеу

$$e^{\alpha x} = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x-s) e^{\alpha s} ds$$

түріне келеді. Бұған $x-s=t$ деп ауыстыру енгізсек,

$$e^{\alpha x} = e^{\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{-\alpha t} dt,$$

яғни α мына төмендегі теңдеудің шешімі болуы керек:

$$\lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{-\alpha t} dt = 1.$$

Әрине, егер біртекті теңдеудің нөлге тең емес шешімі бар болса, онда біртекті емес теңдеудің ақырсыз көп шешімі бар болады.

3 мысал. 2 мысалдағы біртекті емес теңдеуге сәйкес

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-s|} \varphi(s) ds$$

біртекті теңдеуін шешу мәселесін қарастыралық.

$$e^{-|x-s|} = \begin{cases} e^{-(x-s)}, & x-s > 0 \\ e^{(x-s)}, & x-s < 0 \end{cases}$$

болғандықтан, теңдеуді

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^x e^{-(x-s)} \varphi(s) ds + \lambda \int_x^{\infty} e^{(x-s)} \varphi(s) ds$$

түрінде жазуға

болады. Бұны дифференциалдасак:

$$\varphi'(x) = -\lambda \int_{-x}^x e^{-(x-s)} \varphi(s) ds + \lambda \int_x^{\infty} e^{(x-s)} \varphi(s) ds,$$

$$\varphi''(x) = \lambda \int_{-\infty}^x e^{-(x-s)} \varphi(s) ds + \lambda \int_x^{\infty} e^{(x-s)} \varphi(s) ds;$$

бұл өрнектерден $\varphi''(x) - \varphi'(x) + 2\lambda\varphi(x) = 0$ дифференциалдық теңдеуді аламыз. Бұл дифференциалдық теңдеудің шешімі

$$\varphi(x) = C_1 e^{x\sqrt{1-2\lambda}} + C_2 e^{-x\sqrt{1-2\lambda}}, \quad 1-2\lambda > 0,$$

$$\varphi(x) = C_1 + C_2 x, \quad \lambda > \frac{1}{2}; \quad \varphi(x) = C_1 \cos \sqrt{2\lambda-1}x, \quad 1-\lambda < 0.$$

Сонымен, берілген біртекті интегралдық теңдеудің кез келген параметрінің мәнінде нөлге тең емес шешімі бар болады, яғни λ параметрінің кез келген мәні теңдеудің меншікті саны болады.

Фурье түрлендіруі I-текті интегралдық теңдеуді шешу үшін де қолданылады:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, s) \varphi(s) ds = f(x). \quad (120)$$

Бұл теңдеудегі функциялар Фурье түрлендіруінің шарттарын қанағаттандырады деп ұйғарып, теңдеудің екі жағына Фурье түрлендіруін қолдансақ, $\sqrt{2\pi} \tilde{K}(t) \tilde{\varphi}(t) = \tilde{f}(t)$ өрнегін аламыз. Бұдан

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{\tilde{f}(t)}{\sqrt{2\pi} \tilde{K}(t)}.$$

Енді бұған Фурьеңің кері түрлендіруін қолдансақ,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{K}(t)} e^{ixt} dt.$$

2 теорема. $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, ал $K(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ болсын. (120) теңдеудің шешімі $\varphi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ бар болуы үшін ол теңдеудегі $f(x)$ пен $K(x)$ функциялары үшін $\tilde{f}(t)/\tilde{K}(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ болуы қажетті де жеткілікті.

4-мысал. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2/4x} \varphi(t) dt = e^{-ax}, a > 0$ түріндегі I-текті интегралдық теңдеуді шешу керек.

Шешуі. $K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-t^2/4x}$ деп белгілеп,

$$K(p, t) \doteq \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-t^2/4x} \cdot e^{-px} \Big|_{x=z^2} = 2 \int_0^\infty e^{-pz^2 - t^2/4z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-t\sqrt{p}}.$$

Бұдан кейін $\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-t^2/4x} \varphi(t) dt \doteq \frac{1}{\sqrt{p}} \varphi(\sqrt{p})$, демек, $\varphi(x) = \cos \sqrt{ax}$, себебі

$$\varphi(t) = \frac{q}{t^2} + a.$$

5 мысал. $\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|} e^{-itx} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+t^2}$ болғандықтан

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tilde{\varphi}(t)}{1+t^2} = \tilde{f}(t)$$

өрнегін аламыз. Бұған кері түрлендіруді қолдансақ,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \sqrt{\frac{\pi}{2}} f(t) (1+t^2) e^{ixt} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f(t) (1+t^2) e^{ixt} dt.$$

Ескерту. Интегралдық теңдеулерді Фурье түрлендіруін пайдаланып шешу кезінде әртүрлі интегралды есептеуде қиыншылықтар кездеседі. Бұл интегралдарды белгілі арнайы түрлендірулер кестелерін пайдаланып шешкен дұрыс.